Μοντέλα Μαθηματκού Προγραμματισμού

Παντελής Κάπρος
Καθηγητής Σχολής ΗΜΜΗΥ, ΕΜΠ
2005

Γενική Μορφή Μοντέλου ΜΠ

- Να βρεθούν αριθμητικές τιμές των αγνώστων **μεταβλητών απόφασης** Χ (ν διαστάσεων) οι οποίες επιτυγχάνουν
- Βέλτιστη αριθμητική τιμή ενός στόχου που εκφράζεται από την **αντικειμενική συνάρτηση** F(X) (μιάς διάστασης)
- Υπό την προϋπόθεση ότι αυτή η λύση Χ ευρίσκεται εντός του **χώρου εφικτών λύσεων** που προσδιορίζεται από συνθήκες G(X) οι οποίες ορίζουν μη κενό χώρο μ διαστάσεων.

$$\underset{X}{Max} \qquad f = F(X)$$

$$st \qquad G(X) \in S$$

$$X \in \mathbb{R}^n \quad F(X) \in \mathbb{R}$$

$$G(X) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού

- Ένα ΜΜΠ είναι γραμμικό όταν ως προς τις μεταβλητές απόφασης:
  - η αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμμική και
  - ο χώρος των εφικτών λύσεων ορίζεται από ένα σύστημα γραμμικών ανισοτήτων ή ισοτήτων
- Οι συντελεστές των γραμμικών αυτών σχέσεων αποτελούν αριθμητικά δεδομένα (παράμετροι)
- Χωρίς βλάβη της γενικότητας δεχόμαστε ότι οι μεταβλητές απόφασης είναι όλες μη αρνητικές

$$
\begin{array}{ll}
Max & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
s.t. & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1 \\
 & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2 \\
 & \ldots \\
 & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m \\
 & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
Max & z = C \cdot X \\
st & A \cdot X \le b \\
 & X \ge 0
\end{array}
$$

Εισαγωγή Μεταβλητών Απόκλισης

S διάνυσμα μη αρνητικών m μεταβλητών απόκλισης (μία για κάθε περιορισμό)

Έτσι οι άγνωστοι είναι πλέον οι X και οι S

$$\begin{aligned} &Max \quad && z = C \cdot X + 0 \cdot S \\ &st && A \cdot X + I \cdot S = b \\ & && X \geq 0, S \geq 0 \end{aligned}$$

$$X : \left[x_i \right]_{i=1,\dots,n} \qquad C : \left[c_i \right]_{i=1,\dots,n}$$

$$A : \left[a_{ji} \right]_{j=1,\dots,m \;\; i=1,\dots,n} \qquad b : \left[b_j \right]_{j=1,\dots,m}$$

$$I : \begin{bmatrix} 1 \dots 0 \\ \dots. \\ 0 \dots 1 \end{bmatrix} \qquad S : \left[s_j \right]_{j=1,\dots,m}$$

Εισαγωγή στον Αλγόριθμο Simplex

Ορίζουμε το διάνυσμα Y ως άγνωστο με διαστάσεις n+m αποτελούμενο από τους αγνώστους X και S, δηλαδή:

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ S \end{bmatrix} = \left[y_i \right]_{i=1,\dots,n,n+1,\dots,n+m}$$

Ομοίως ορίζουμε:

$$D = \left[C, 0 \right] = \left[c_1, \dots, c_n, 0, \dots, 0 \right]_{n+m}$$

$$E = \left[A, I \right] = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \;\; 1 \dots 0 \\ \dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \;\; 0 \dots 1 \end{bmatrix}_{m,n+m}$$

Οπότε το πρόβλημα γράφεται:

$$\begin{aligned} &Max && z = D \cdot Y \\ &st && E \cdot Y = b \\ & && Y \geq 0 \end{aligned}$$

Διαστάσεων 1=(1,n+m)x(n+m,1)

Διαστάσεων (m,1)=(m,n+m)x(n+m,1)

Εύρεση Εφικτής Λύσης – Βάση

- Εφικτή είναι η μη αρνητική τιμή των Y=[X,S] η οποία ικανοποιεί τους περιορισμούς EY=b
- Μία εφικτή λύση προκύπτει επομένως ως λύση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων EY=b
- Όμως ο αριθμός των αγνώστων είναι n+m και υπερβαίνει τον αριθμό των εξισώσεων m. Άρα πρέπει από τους αγνώστους οι n να λάβουν αυθαίρετη τιμή (έστω 0) ώστε να λυθεί γραμμικό σύστημα mxm από το οποίο να προκύψουν m τιμές διάφορες του μηδενός για m από τις n+m μεταβλητές X και S
- Άρα κάθε εφικτή λύση διαχωρίζει τις n+m μεταβλητές X και S σε δύο σύνολα: m από αυτές διάφορες του μηδενός (Βάση του ΓΠ) και n από αυτές ίσες με μηδέν (μη βασικές μεταβλητές).

Επιλογή Βάσης ΓΠ

- Έτσι το σύνολο των n+m μεταβλητών διαμοιράζεται σε δύο ξένα υποσύνολα: τη βάση B και τις μη βασικές μεταβλητές NB

$$\begin{aligned} &Max \quad z = D_B Y_B + D_{NB} Y_{NB} \\ &st \quad E_B Y_B + E_{NB} Y_{NB} = b \\ &\qquad Y_B \geq 0 \quad Y_{NB} = 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή εφικτή λύση ευρίσκεται μέσω αντιστροφής της μήτρας της βάσης $B = E_B$

$$BY_B = b \Rightarrow Y_B = B^{-1} b$$

Σε αυτήν την εφικτή λύση η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τιμή ίση με:

$$z = D_B Y_B = D_B B^{-1} b$$

η οποία δεν είναι απαραίτητα η βέλτιστη. Θα υπάρχει όμως διαμοίραση των n+m μεταβλητών σε κατάλληλη βάση B για την οποία η αντικειμενική συνάρτηση βελτιστοποιείται.

Επιλογή Βάσης ΓΠ

Έστω μία βάση B, ποιά είναι η επίπτωση αν μία μη βασική μεταβλητή λάβει τιμή θετική αντί του μηδενός; Κατ' αρχήν οι τιμές των βασικών μεταβλητών θα αλλάξουν:

(1) $$Y_B = B^{-1}b - B^{-1}E_{NB}Y_{NB} \geq 0$$

αλλά και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα αλλάξει:

$$Z = D_B Y_B - D_{NB}Y_{NB} = D_B\left(B^{-1}b - B^{-1}E_{NB}Y_{NB}\right) - D_{NB}Y_{NB}$$

(2) $$Z = D_B B^{-1}b - \left(D_B B^{-1}E_{NB} - D_{NB}\right)Y_{NB}$$

Η εξίσωση (1) δείχνει μέχρι πόσο μπορεί να αλλάξει χωριστά κάθε μη βασική μεταβλητή ώστε να διατηρηθούν μη αρνητικές οι βασικές μεταβλητές, ενώ η εξίσωση (2) δείχνει αν η μεταβολή της μη βασικής μεταβλητής βελτιώνει την αριθμητική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Αν για καμιά μη βασική μεταβλητή δεν βελτιώνεται η αντιμειμενική συνάρτηση, τότε η τρέχουσα βάση είναι και βέλτιστη, ενώ αν βελτιώνεται η μη βασική μεταβλητή που αξίζει να μπει στη βάση είναι εκείνη που βελτιώνει πιο πολύ την αντικειμενική συνάρτηση.